

F. Kungsi Kuadrat

1. Pengertian

Fungsi kuadrat merupakan fungsi polinom berderajat dua.

Bentuk Umum fungsi kuadrat adalah : $y = ax^2 + bx + c$ atau dalam bentuk persamaan kuadrat dituliskan sebagai $ax^2 + bx + c = 0$

2. Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar PK $ax^2 + bx + c = 0$ merupakan nilai variabel x sehingga PK bernilai benar. Akar-akar suatu PK maksimal ada dua.

Pada grafik fungsi kuadrat, jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar PK, maka titik-titik dengan koordinat $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ merupakan titik potong kurva PK dengan sumbu x .

Menentukan akar-akar PK $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dilakukan dengan 3 cara :

a. Pemfaktoran

Contoh : Tentukan akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$

Penyelesaian :

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

atau

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Jadi akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$ adalah $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$

b. Melengkapkan kuadrat sempurna

Contoh : Tentukan akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$

Penyelesaian :

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 6x = -8$$

$$x^2 - 6x + \dots = -8 + \dots$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 \quad \rightarrow \quad \text{angka 9 diperoleh dari } \left(\frac{1}{2}(6)\right)^2$$

$$(x - 3)^2 = 1$$

$$(x - 3) = \pm 1$$

$$\text{Jika } x - 3 = -1$$

$$x = -1 + 3$$

$$x = 2$$

$$\text{dan jika } x - 3 = 1$$

$$x = 1 + 3$$

$$x = 4$$

Jadi akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$ adalah $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$

c. Rumus abc

Akar-akar PK $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bentuk $b^2 - 4ac$ dinamakan dengan Diskriminan (D)

Contoh : Tentukan akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$

Penyelesaian : Diketahui $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Diperoleh } x_1 &= \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} & \text{atau} & & x_2 &= \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} \\x_1 &= 4 & & & x_2 &= 2\end{aligned}$$

Jadi akar-akar PK $x^2 - 6x + 8 = 0$ adalah $x_1 = 4$ dan $x_2 = 2$

Latihan

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut !

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$
2. $x^2 + 3x - 10 = 0$
3. $x^2 - 2x - 48 = 0$
4. $2x^2 + 13x + 6 = 0$
5. $3x^2 + 16x - 12 = 0$

3. Sifat-sifat fungsi/persamaan kuadrat

Pada fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan $D = b^2 - 4ac$ maka :

- a. Sifat fungsi pada nilai a (koefisien variabel x^2) :
 - Jika $a > 0$ maka grafik membuka ke atas (nilai ekstrim minimum)
 - Jika $a < 0$ maka grafik membuka ke bawah (nilai ekstrim maksimum)
- b. Diskriminan (D) :
 - Jika $D > 0$ ada 2 akar nyata (grafik memotong sumbu x di 2 titik)
 - Jika $D = 0$ ada 1 akar kembar (grafik menyinggung sumbu x di 1 titik)
 - Jika $D < 0$ tidak ada akar nyata (grafik tidak menyentuh sumbu x)

c. Persamaan sumbu simetri

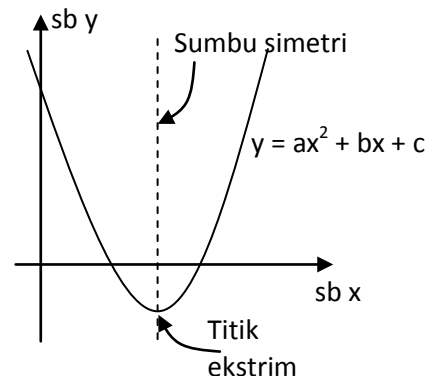
$$x = \frac{-b}{2a}$$

d. nilai ekstrim

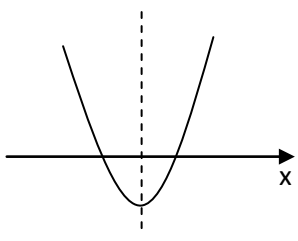
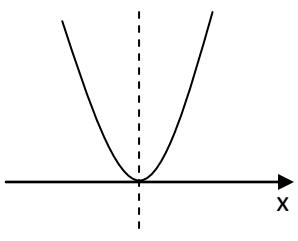
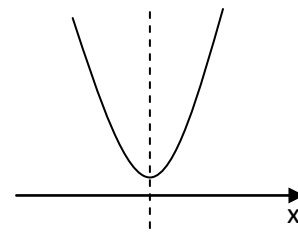
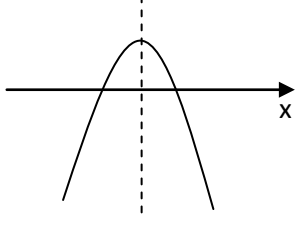
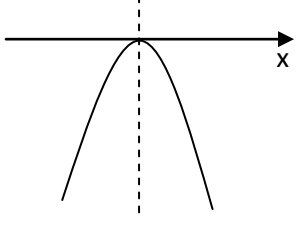
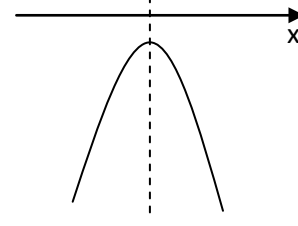
$$y = \frac{-D}{4a}$$

e. Titik ekstrim mempunyai koordinat

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a} \right)$$



Lebih jelasnya lihat tabel berikut :

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

4. Menggambar Grafik fungsi kuadrat

Menggambar grafik Fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dapat dilakukan dengan 2 cara :

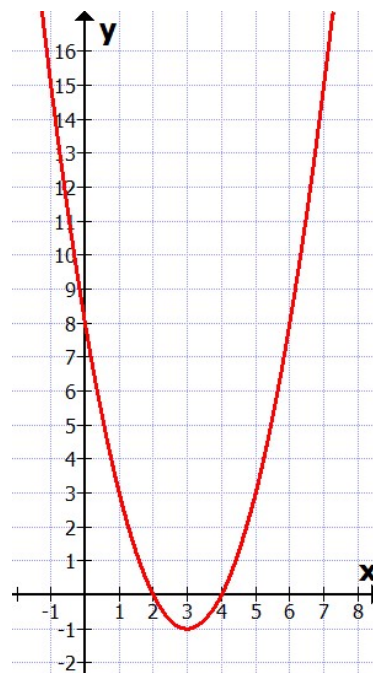
- Tracing Process Curve yaitu dengan menentukan beberapa nilai x kemudian menentukan nilai y yang sesuai dengan bentuk fungsi. Cara ini memerlukan paling tidak 8 pasangan nilai x dan y .

Contoh : Gambarkan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 6x + 8$

Kita siapkan tabel pasangan nilai x dan y sebagai berikut :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

Dari hasil tabel di atas maka grafiknya sebagai berikut :



b. Menggunakan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat

Langkah-langkah menggambar grafiknya sebagai berikut :

- 1) Menentukan titik potong grafik dengan sumbu simetri (sumbu-x dan sumbu-y)
 - Titik potong dengan sumbu y (yaitu jika $x = 0$)
 - Titik potong dengan sumbu x (lihat bahasan akar-akar PK)
- 2) Tentukan sumbu simetri dan titik ekstrim
- 3) Jika perlu tambahkan beberapa titik lain sebagai bantuan

Contoh : Gambarkan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 6x + 8$

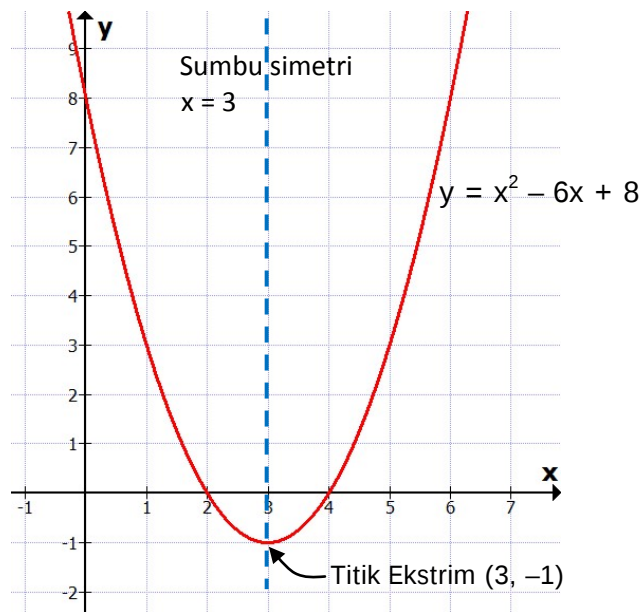
- Titik potong dengan sumbu y
Untuk $x = 0$ maka $y = x^2 - 6x + 8$
 $y = 0^2 - 6(0) + 8 = 8$
Diperoleh titik potong dengan sumbu y di $(0, 8)$
- Titik potong dengan sumbu x
 $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4$
Karena $D > 0$ maka ada 2 titik potong dengan sumbu x

Untuk $y = 0$ maka

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{dan} \quad x - 4 = 0$$
$$x = 2 \quad \quad \quad x = 4$$

Diperoleh titik potong dengan sumbu x di $(2, 0)$ dan $(4, 0)$

- Sumbu simetri
Sumbu simetri grafik adalah $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$
Diperoleh sumbu simetrinya adalah $x = 3$
- Titik Ekstrim
Nilai ekstrim $y = \frac{-D}{4a} = \frac{-4}{4(1)} = \frac{-4}{4} = -1$
Diperoleh titik ekstrim di $(3, -1)$ dan titik ekstrimnya minimum ($a > 0$)



Latihan :

Gambarkan grafik fungsi dari persamaan kuadrat berikut :

1. $y = x^2 + 4x - 12$
2. $y = -x^2 + 4x + 5$